



Seconde Géométrisation pour la CEM

Olivier Maurice, Alain Reineix, Philippe Durand

► To cite this version:

Olivier Maurice, Alain Reineix, Philippe Durand. Seconde Géométrisation pour la CEM. CEM 2016, Jul 2016, Rennes, France. hal-01347894

HAL Id: hal-01347894

<https://hal.science/hal-01347894>

Submitted on 21 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Seconde Géométrisation pour la CEM

O.Maurice¹, A.Reineix², P.Durand³

¹IRSEEM EA4353 ESIGELEC, Technopôle du Madrillet 76800 St Etienne du Rouvray, olivier.maurice@esigelec.fr

²XLIM, 123 Avenue Albert Thomas, 87060 Limoges, alain.reineix@xlim.fr

³M2N CNAM, 292 rue St Martin 75000 Paris, philippe.durand@cnam.fr

Abstract. Gabriel Kron a élaboré l'analyse tensorielle des réseaux en 1939. Ses travaux ont donné lieu à des réflexions sur les représentations topologiques de l'électromagnétisme avec les travaux de Branin, Roth, Happ, Hoffmann, etc. Mais le formalisme de Kron s'écarte des fondamentaux de la géométrie Riemannienne, entre autres parce qu'il oblige à accepter une métrique non symétrique, sans parler de ses composantes éventuellement vues comme des opérateurs et non des réels. Partant de l'équation de Kron, on montre que l'on peut généraliser la création d'un jacobien qui conduit à une métrique Riemannienne symétrique. On peut alors se raccrocher à tous les concepts découlant des géométries de Riemann. On profite de cette opportunité pour voir l'espace des courants comme une variété bornée au sens de Poincaré. Le genre de cette variété et son volume décrivent alors l'existence de zones de valeurs de courants impossibles. Si les zones de sensibilité recoupent ces "trous" ou sont au-delà des bords de la variété, on démontre alors formellement que le système lié ne sera jamais perturbé.

I. INTRODUCTION

Banesh Hoffmann fait partie des mathématiciens qui auront le plus défendu les travaux de Kron. Ceux-ci sortaient du cadre classique de l'analyse tensorielle, vue comme l'algèbre privilégié pour la description des géométries Riemanniennes. Par ailleurs, plus difficile à numériser que les méthodes nodales, la méthode de Kron travaillant dans les espaces des mailles et des paires de noeuds fut rapidement oubliée pour privilégier les techniques plus proches des structures connues de variables d'états (il y a plusieurs façons de choisir les mailles alors qu'il n'y a qu'une façon de choisir les nœuds. C'est pourquoi les méthodes nodales ont été privilégiées dans un premier temps pour réaliser des outils numériques. Depuis des techniques ont été trouvées donnant une base de maille préférentielle pour un circuit). Pourtant derrière le formalisme de Kron, comme l'avait souligné Hoffmann, Roth, Branin, etc., se cachait l'établissement du lagrangien du problème et des fondamentaux plus profonds, posant l'existence d'un espace abstrait des courants dont les courbures sont révélatrices de non linéarités fortes et les variétés associées révélatrices de zones inaccessibles, même sous contraintes CEM (suivant Kron, une fois les

équations du problème établies, le graphe ne sert plus à rien. On peut alors étudier les fonctions des courants comme si elles étaient les coordonnées de projections sur des axes géométriques en impédances. Si la direction est une résistance, l'espace est plat. Si par contre à mesure que le courant augmente, la distance sur un axe diminue, nous sommes en présence d'une impédance non linéaire et la surface décrite par les couples de coordonnées va se courber). Mais ces structures n'apparaissent pas de façon évidente lorsque l'on reste dans l'écriture de Kron, car on ne peut pas totalement relier les équations obtenues à des objets ou des structures mathématiques connues dans la géométrie Riemannienne. En associant le système d'équation établi par Kron à une hypersurface paramétrée, dont les paramètres sont les courants, eux-mêmes dépendant d'autres paramètres, on fait apparaître un jacobien, dont le produit par sa transposée engendre la métrique de Riemann. Découvrant cela, on reformule l'équation de Kron en une nouvelle équation à partir de laquelle le système devient assimilable à une variété bornée que l'on va étudier pour en déduire ses propriétés, ici dans le cadre de la CEM. La première d'entre elles est le recoupement de la variété avec un volume décrivant les valeurs de courants créés en mode perturbé. Si ce recoupement est nul, cela signifie que le mode perturbé engendre des courants qui sortent des valeurs acceptées sans dégradation, et le système est en situation de risque de défaillance. Nous utilisons dans ce papier les conventions de l'algèbre tensorielle, dont celle de l'indice muet [1].

II. PRINCIPE MATHÉMATIQUE INSCRIT DANS LE CADRE DE LA CEM

L'équation de Kron part de l'équation de Kirchhoff : $e_a = z_{ab}i_b + V_a$. Dans cette équation (en volts), e_a est un covecteur des sources (fém couplées ou intrinsèque de générateurs), z_{ab} est un tenseur des impédances (en ohms) : opérateurs reliant sources et courants induits par ces sources, i^b est le vecteur des courants des branches présentes dans le circuit considéré (en ampères) et V_a est le covecteur des différences de potentiels aux bornes des branches. Cette équation décrit la situation présentée figure 1, les termes z_{ab} , $a \neq b$ décrivant des couplages possibles entre des branches différentes (en ohms et peu

importe les fonctions rattachées à ces couplages). Kron a alors proposé de voir la loi des mailles comme une transformation vers un espace des courants de mailles qui intègre de fait les deux lois de Kirchhoff (figure 2). On écrit d'une manière générale que les courants de branches i s'expriment en fonction de courants de mailles J qui comprennent les paires de noeuds sous forme de "mailles virtuelles": $i_a = C_a^\mu J_\mu$. Kron a par ailleurs inscrit cette démarche dans le cadre de l'analyse tensorielle, créant les force électromotrice comme des covecteurs de l'espace dual de l'espace des courants. C'est ce deuxième aspect qui donnera lieu à de nombreuses discussions avec les mathématiciens, estimant que ces mécanismes ne pouvaient être appliqués à des relations non linéaires et non symétriques, arguant d'une difficulté supplémentaire liée à l'aspect non holonomique des relations électriques (c'est à dire des équations où interviennent non seulement les charges, mais aussi leurs dérivées : les courants). Les deux équations précédentes se résument pour le formalisme de Kron au système :

$$\begin{cases} e_a = z_{ab} i^b + V_a \\ i^b = C_\alpha^b J^\alpha \end{cases} \quad (1)$$

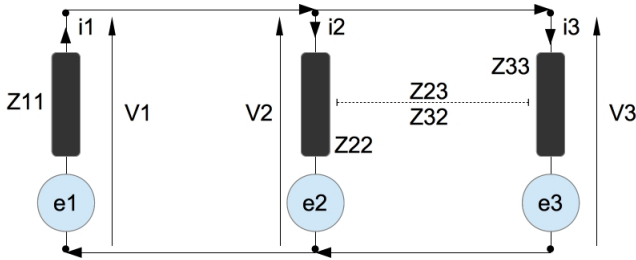


Fig. 1. Ensemble de réseaux de Kirchhoff

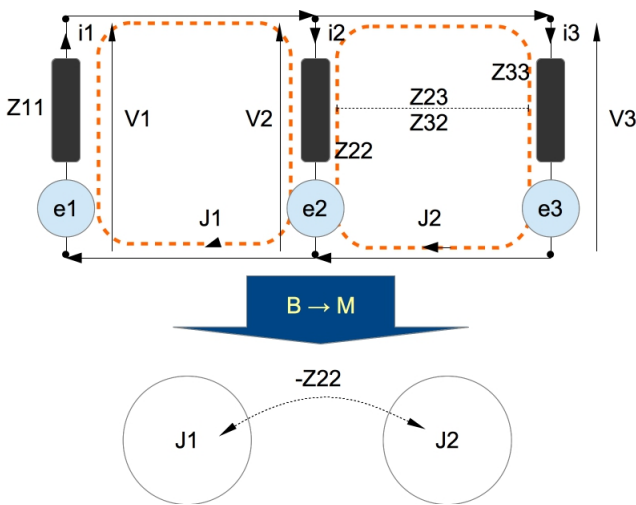


Fig. 2. Passage dans l'espace des mailles

En appliquant les règles de l'algèbre tensoriel on démontre facilement l'équation de Kron :

$$\begin{aligned} e_a &= z_{ab} i^b + V_a \Rightarrow e_a = z_{ab} C_\alpha^b J^\alpha + V_a \\ \dots \Rightarrow C_\beta^a e_a &= C_\beta^a z_{ab} C_\alpha^b J^\alpha + C_\beta^a V_a \end{aligned} \quad (2)$$

Le terme $C_\beta^a V_a$ est nul, étant la traduction en topologie cellulaire [2] de la loi des mailles. Reste $e_\beta = z_{\beta\alpha} J^\alpha$ qui est l'équation de Kron. Un défaut dans cette équation appliquée sur des cas très diverses, est que la façon dont on construit $z_{\beta\alpha}$ n'implique pas que cette matrice soit symétrique. Mathématiquement, cela signifie que $z_{\beta\alpha}$ n'est pas diagonalisable. Autrement dit, on ne peut pas "découpler" les éléments de $z_{\beta\alpha}$. Ceci peut être "visualisé" par un graphe. Considérons la figure 3. Dans l'espace

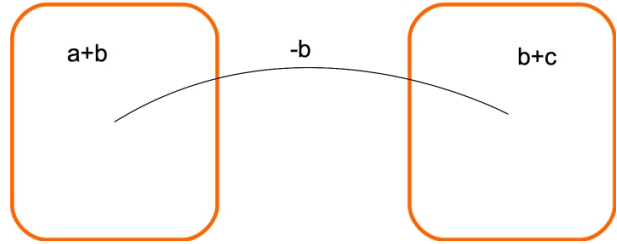
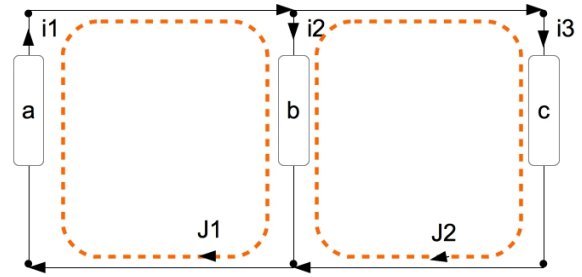


Fig. 3. Découplage des mailles

des mailles, le tenseur des impédances du premier réseau est :

$$z_{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} a+b & -b \\ -b & b+c \end{bmatrix} \quad (3)$$

Or le second réseau possède le même tenseur. On peut alors raisonner à l'envers et partir du réseau du bas où deux mailles sont couplées par une corde d'impédance $-b$ et se demander comment pourrait être représenté un schéma connexe comme celui du haut dans le cas où les couplages de la maille 1 vers la maille 2 et de la maille 2 vers la maille 1 ne seraient pas identiques ? Cela imposerait d'avoir une branche commune dont l'impédance serait dépendante du sens du courant, donc un système non linéaire (par exemple un circulateur, une diode, etc.). Et c'est bien une trace possible des systèmes non linéaires que de présenter des tenseurs non symétriques [1]. On voit de fait également l'intérêt qu'il y a à pouvoir diagonaliser la matrice $z_{\beta\alpha}$. C'est en partie l'objet de la "seconde géométrisation".

III. MISE EN ÉVIDENCE DES TERMES D'INERTIE

Le tenseur des impédances est justement le terme qui ne revêt pas strictement les propriétés d'une métrique, déjà par ses non symétries possibles. Dans cet objet on trouve entre autre des termes liés aux inductances et mutuelles inductances des circuits modélisés. Écrivons : $z_{\beta\alpha} = h_{\beta\alpha} + \chi_{\beta\alpha}p$, p étant l'opérateur de Laplace et χ la matrice contenant les termes inductifs (en henry). L'équation de Kron devient $e_\beta = (h_{\beta\alpha} + \chi_{\beta\alpha}p) J^\alpha$. Regardons alors l'équation $(h_{\beta\alpha} + \chi_{\beta\alpha}p) J^\alpha$ comme une surface paramétrée

$$\psi(J^1, J^2, \dots) = (e_1(J^1, \dots), e_2(J^1, \dots), e_3(J^1, \dots))$$

de paramètres J^α (courant de maille en ampère). L'idée sous-jacente n'est plus de voir le système d'équations comme un ensemble de relations qui comportent certaines solutions, mais plutôt comme une surface géométrique ψ (la fonction ψ dépend des fém en volts) qui décrit un réseau de coordonnées curvilignes J^k sur laquelle on peut se déplacer à l'aide d'un "tapis volant" de coordonnées localement données par les e_q (en volt). A bord de ce tapis on pourra "ressentir" les formes de cette surface et en tirer des propriétés, ou tout au moins essayer ! Pour cela on veut inscrire la surface dans un espace dont les axes sont les impédances. Par exemple pour un réseau constitué de trois mailles nous aurons trois axes, chaque axe étant associé à l'impédance d'une maille. Suivant les valeurs que peuvent prendre les courants, donc les coordonnées de points dans cet espace, la forme engendrée par l'ensemble des points tracés va varier. On veut de fait chercher les espaces tangents à cette surface en définissant une base $\partial_{J^\alpha} \psi$. Prenons un exemple pour illustrer ce mécanisme : on considère un câble blindé illuminé par un champ magnétique basse fréquence, et on calcule l'énergie ramenée aux bornes de charges connectées sur le câble. Ce problème se résume à trois mailles (figure 4) et en établissant l'équation de Kron on trouve le tenseur fondamental Z suivant :

$$Z = \begin{pmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ \alpha & \sigma_t + R_m + L_1 p & 0 \\ 0 & \sigma_t - M_t p & R_2 + \sigma_t + L_2 p \end{pmatrix} \quad (4)$$

L'objet de l'article n'est pas de détailler ce cas, mais de s'en servir pour illustration. On attachera donc plus d'importance à la structure de la matrice qu'à ses composantes intrinsèquement. Le câble est d'impédance de transfert $\sigma_t - M_t p$ (en ohms) et α est une fonction de couplage (en ohms) entre l'antenne d'émission du champ magnétique (première maille) et le câble blindé (domaine externe). R_m est la résistance d'un plan de masse sur lequel se trouve le câble et R_2 la somme des deux résistances de charge interne. L_1 et L_2 sont les

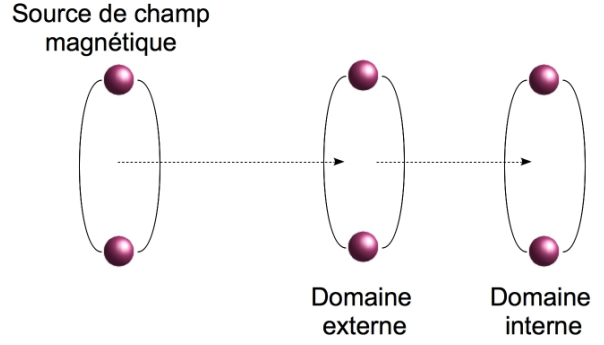


Fig. 4. Topologie du problème considéré

inductances des domaines externe et interne. En dérivant chaque ligne du système d'équation de Kron par rapport aux courants de mailles, on trouve les trois vecteurs de base :

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} R_0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_m + \sigma_t \\ \sigma_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_2 + \sigma_t \end{pmatrix} \quad (5)$$

On s'aperçoit alors de deux choses fondamentales :

- 1) les vecteurs de base (dont les composantes sont en ohms) ont pour composantes les termes colonne du jacobien \mathcal{J} du système d'équation de Kron ;
- 2) pour retrouver le système d'équation de Kron il faut créer un objet $L_{\beta\alpha}$ supplémentaire.

Cet objet (en Henry) est donné par :

$$L_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 \\ 0 & -M & L_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

La matrice Jacobienne (en ohm) est donnée par :

$$\mathcal{J}_{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} R_0 & 0 & 0 \\ \alpha & R_m + \sigma_t & 0 \\ 0 & \sigma_t & R_2 + \sigma_t \end{bmatrix} \quad (7)$$

Cette matrice jacobienne n'a pas de sens physique particulier. On peut juste dire que dans le cas de circuits linéaires, elle porte les dissipations et les stockages d'énergie potentielle (résistances et condensateurs). En regardant les vecteurs de base, on imagine qu'un développement $J^\nu \mathbf{b}_\nu$ engendre un triplet de valeurs (e_1, e_2, e_3) que l'on peut projeter dans un espace en trois dimensions localement. La particularité des vecteurs de base ici, est que l'augmentation de J^1 par exemple ne se contente pas de déplacer la valeur e_1 , mais également la valeur e_2 et ce parce que les directions de cet espace sont couplées. Les vecteurs de la base locale \mathbf{b}_q sont les vecteurs du plan tangent local construit sur les lignes engendrées par les coordonnées des directions curvilignes J^k qui paramétrisent les coordonnées (x, y, z, \dots) ici représentée par les sources e_m . La surface paramétrée considérée couvre toutes les valeurs possibles dans le cadre fonctionnel des courants J^k . On excite localement ces courants par des coordonnées e_k et l'on pourrait chercher

à voir comment se déformerait la surface curviligne sous-jacente si l'on change localement ou plus globalement les sollicitations e_k . Soit que si l'on a tracé la surface à partir de toutes les valeurs autorisées fonctionnellement pour les J^k , en plaçant un triplet imposé $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$, on peut vérifier si ce point s'inscrit dans la surface fonctionnelle ou non. Continuons le développement : en ré-écrivant l'équation de Kron sous la forme $e_\beta - L_{\beta\alpha} p J^\alpha = \mathcal{J}_{\beta\alpha} J^\alpha$ et en remarquant que :

$$\Gamma_{\nu\beta} \mathcal{J}_{\beta\alpha} = G_{\nu\alpha} \quad (8)$$

où $\Gamma_{\nu\beta}$ est la matrice transposée du jacobien (en ohm) et G la métrique de la surface paramétrée ainsi définie (en Ω^2 de fait). Le tenseur métrique a un rôle central en géométrie différentielle. L'expression canonique $U = \sqrt{G_{\mu\nu} J^\mu J^\nu}$ renvoie à des volts et constitue la distance U fondamentale. Imaginons un cas un peu plus simple que celui présenté, où la métrique comporte uniquement des termes diagonaux résistifs R_1^2, R_2^2, R_3^2 . On voit que la distance U représente dans ce cas la racine de la puissance dissipée dans ces résistances, en volts. C'est la différence de potentiels correspondant à un point de coordonnées curvilignes J^1, J^2, J^3 . On est dans la même situation qu'un espace en trois dimensions où l'on aurait $x = J^1, y = J^2, z = J^3$. Le plus court chemin entre deux points dans cet espace plat est donné par la distance U . Dans l'espace couplé précédent, cette distance est plus compliquée, mais reste donnée par la même expression. L'espace n'en est pas pour autant courbé ni tordu car les dérivées de la métrique sont nulles. Dans ce cas, la distance la plus courte qu'emprunterait un système en évoluant suivrait une géodésique de cet espace dont l'expression peut être déterminée [10]. L'évolution du système respecte un principe de moindre action qui s'exprime par une intégrale sur U . La métrique est donc l'objet dont on se dote pour pouvoir réaliser des mesures et calculer des distances dans un espace donné.

On obtient une nouvelle équation : $T_{\nu\alpha} = G_{\nu\alpha} J^\alpha$ avec $T_{\nu\alpha} = \Gamma_{\nu\beta} (e_\beta - L_{\beta\alpha} p J^\alpha)$ qui est un terme traduisant l'inertie (au sens général) du système. Par rapport au raisonnement que nous avons conduit sur les triplets, cette nouvelle formulation de l'équation du système ne renvoie plus directement au triplet source (e_1, e_2, e_3) mais sur un triplet considérant l'inertie du système, c'est à dire sa propension à résister à une impulsion. Dans le cas statique, l'inertie est nulle et le terme $\Gamma_{\nu\beta} e_\beta J^\nu$ donne une puissance normalisée en impédance et à l'équilibre. Mais comment interpréter l'équation quand le système est dynamique ?

IV. VARIÉTÉ

L'équation $T_\nu = G_{\nu\alpha} J^\alpha$ (en $\Omega^2 A$ ou ΩV) est associée à un système d'inégalités renseignant les valeurs limites prises par les courants (en ampères) fonctionnellement (et incluant les bornes au-delà desquelles l'électronique se dégrade suivant des critères définis). Soit \mathcal{M} cette variété, on peut étudier sous quelles conditions la variation des sources T_ν peut conduire à dépasser ses bornes, ce

qui revient à conclure que l'électronique liée peut être perturbée ou dégradée, suivant les critères choisis.

Partant des sources T_ν , on peut chercher à exprimer la variation des sources associées à un perturbateur dT_ν . On trouve immédiatement : $dT_\nu = \Gamma_{\nu\beta} de_\beta$ (annexe). En imposant la variation de e_β , on écrit :

$$dT_\nu = dG_{\mu\zeta} J^\zeta + G_{\nu\zeta} dJ^\zeta \quad (9)$$

Restons dans le cas où $dG_{\mu\zeta} = 0$ (ce n'est pas obligatoire, la métrique G pouvant dépendre des sources. Mais ce cas sort du cadre de cet article). On obtient :

$$dJ^\zeta = [G_{\nu\zeta}]^{-1} dT_\nu \quad (10)$$

La variation de la métrique va donc permettre d'évaluer celle des courants induits. Considérons le mécanisme utilisé sur un cas très simple. Considérons un circuit "RL" représentant une boucle, illuminé par un champ magnétique variable engendrant dans la boucle une force électromotrice e . L'équation du problème est $e = (r + Lp) i$. Le terme Lpi représente le champ de réaction qui s'oppose au champ inducteur [3]. C'est un terme qui s'apparente à de l'inertie en mécanique. L'induction effective est donc $e - Lpi$ que l'on nomme T . Dès lors on peut chercher la variation de T en fonction de e pour obtenir $dT = R di$. La dissipation est d'une manière générale la source d'écart entre l'induction et la réaction.

Si l'on reconsidère le cas du blindage schématisé figure 4, la métrique correspondante approximée aux seuls termes significatifs est :

$$G \approx \begin{bmatrix} R_0^2 & \alpha\sigma_t & 0 \\ \alpha\sigma_t & 2\sigma_t^2 & R_2\sigma_t \\ 0 & R_2\sigma_t & R_2^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Si le covecteur des sources e_β a pour seul terme non nul e_1 on obtient en calculant $G^{-1}T$:

$$dJ^\zeta = [G_{\nu\zeta}]^{-1} \Gamma_{\nu\beta} de_\beta = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} R_0\sigma_t^2 R_2^2 \\ -\alpha R_0\sigma_t R_2^2 \\ \alpha R_0\sigma_t^2 R_2 \end{bmatrix} de_1 \quad (12)$$

avec $\Delta = R_0^2\sigma_t^2 R_2^2 - \alpha^2\sigma_t^2 R_2^2$.

D'où l'on déduit la variation de courant dans la charge R_2 :

$$dJ^3 = \left(\frac{\alpha R_0\sigma_t^2 R_2}{R_0^2\sigma_t^2 R_2^2 - \alpha^2\sigma_t^2 R_2^2} \right) de_1 \approx \frac{\alpha}{R_0 R_2} de_1 \quad (13)$$

pour $\alpha^2 \ll R_0^2$. Ce résultat signifie qu'un petit déplacement de la valeur de source e_1 dans la définition de notre variété \mathcal{M} engendre un déplacement de la coordonnée curviligne J^3 d'une amplitude $\alpha (R_0 R_2)^{-1}$. Autrement dit, en nous déplaçant d'une petite distance de_1 sur notre surface tangente souvent notée $T_p S$, nous avons engendré une augmentation dJ^3 de la coordonnée curviligne J^3 sur la surface paramétrée d'une quantité proportionnelle au couplage entre les directions e_1 et e_2 et inversement proportionnelle aux charges. Ce déplacement ne dépend pas ici de la position du plan local (l'espace est "plat", sans courbure [4], ce que nous allons détailler ensuite). La figure 4 représente symboliquement le processus. Le résultat obtenu dépend bien sûr du choix de la métrique

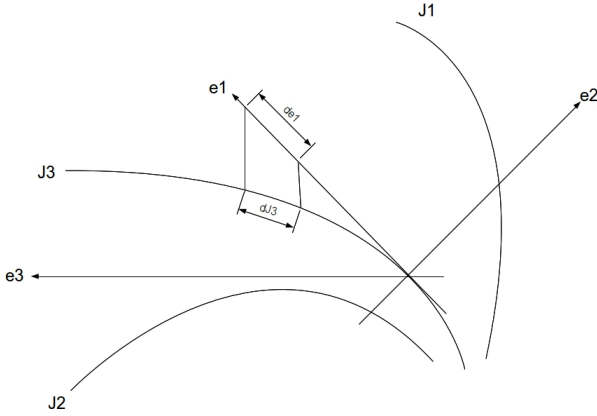


Fig. 5. Illustration du processus

dont on se dote. On rappelle, et cela peut être perturbant, que l'on ne peut pas valider une topologie au sens où l'on se dote d'une topologie et de sa métrique. Mais il faut réaliser que lorsque l'on importe une CAO pour usage dans un code avec maillage, cette validation n'existe pas plus. En effet, la similitude géométrique qui découle des processus industriels entre CAO et fabrication pourraient laisser penser que la CAO est une fidèle reproduction virtuelle d'un objet réel. En fait, même si l'on pouvait "valider la géométrie", bien que cette opération ne soit pas triviale, la métrique associée, c'est à dire le report des propriétés physiques des matériaux employés dans les propriétés électromagnétiques des éléments du maillage n'est en rien valable. On espère se doter de modèles appropriés pour les calculs et estimation que l'on veut faire, mais cela reste des macro-modèles d'une réalité beaucoup plus complexe, voire inaccessible.

La métrique G dont on s'est doté donc, et les hypothèses formulées pour la simplifier, font que l'on peut changer les valeurs des charges mais sans aller au-delà de ces hypothèses, à savoir par exemple $\sigma_t \gg R_m$. Nous avons réalisé ces simplifications ici juste pour éviter des écritures trop imposantes. Une conséquence est la définition de domaine de valeurs possibles pour les courants de mailles, en partie liée aux choix des valeurs d'impédances. L'ensemble contribue à la définition de la variété \mathcal{M} qui décrit notre système. Il est clair que ces impédances et plus particulièrement les charges sont en général imposées par des valeurs fonctionnelles. Le degré de liberté restant dans notre cas est la fonction de couplage α . Pour diminuer l'impact d'une variation de source associée à un perturbateur $e_f + de_1$, e_f étant une source fonctionnelle désirée non considérée dans les équations (régime statique), il faut diminuer soit le terme de couplage α , soit la source elle-même e_1 . On retrouve ici une stratégie classique en CEM [3].

Si le courant J^3 est défini dans le domaine de valeurs acceptables $[0, J_{max}^3]$ (ce domaine peut inclure des variations associées à des perturbateurs, mais dont l'action de modifier pas le comportement du système d'une telle façon qu'il n'assure plus son service) alors le risque de perturbation est donné par la probabilité de perturbation

P telle que :

$$P(J^3 + dJ^3 > J_{max}^3) \quad (14)$$

V. De l'association d'un système avec une variété

Les systèmes d'équations et d'inéquations issues des machines électriques, sont autant de contraintes d'égalités et d'inégalités permettant de définir des hypersurfaces linéaires ou non, ou plus généralement ce que le mathématicien appelle sous variétés. Les variables prennent leurs valeurs dans un sous domaine borné ou non d'un espace n -dimensionnel. Bien sûr, pour ce qui est des systèmes physiques, on envisage essentiellement des domaines bornés. On peut ainsi utiliser le langage des sous variétés dans les modélisations des circuits électriques.

Une sous variété de \mathbb{R}^n peut être décrite de plusieurs façons différentes, par équations et inéquations ainsi, la contrainte d'égalité $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ décrit une sphère comme hypersurface plongée dans un espace à trois dimensions. Cette contrainte est non linéaire mais décrit un espace borné. dans l'espace tridimensionnel, les contraintes linéaires $\{x + y \leq 1 \text{ et } z = 0\}$ définissent un demi-plan (domaine non borné de \mathbb{R}^3). On peut aussi décrire une variété à partir d'un paramétrage, par exemple:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (15)$$

décrit l'équation paramétrique d'une droite plongée dans l'espace, ou le système $(x = \cos t, y = \sin t)$ décrit le cercle unité du plan.

Il faut noter que l'on peut aussi définir une notion de "variété abstraite" qui ne fait aucune référence à un plongement dans un espace plus grand. Dans cet article l'approche par équations est privilégiée pour décrire les sous variétés issues des différentes modélisations des machines électriques.

VI. De l'usage de la seconde géométrisation

Des travaux assez récents [5] ont permis de trouver une méthode de choix des mailles. Car la difficulté numérique de la méthode de Kron réside dans l'établissement de la base de maille, non unique, contrairement aux bases nodales sans ambiguïté. Cette difficulté en même temps que me formalisme s'avérait plus difficile à comprendre que le formalisme nodale a fait que les premiers outils numériques pour résoudre les circuits se sont basés sur les méthodes nodales et non sur la méthode de Kron. Fait étonnant, quand il a fallu trouver un mécanisme pour introduire les sources pilotées, la méthode "MNA" a émergé alors qu'elle présente par ailleurs dans son formalisme théorique, des inhomogénéités gênantes, et que la méthode nodale possédait déjà une solution peu connue : le passage dans l'espace des mailles [6] !

La seconde géométrisation pose de nouvelles difficultés pour être employées dans un cadre d'outil numérique, dont la capacité pour le code de réaliser des calculs

formels. Si son intérêt se confirme, elle semble pour l'instant dévolue à des études théoriques pour la CEM. Mais cet usage certes restreint n'est en soit pas un argument pour abandonner cette voie. Si les approches théoriques en CEM se font malheureusement trop rares, nul doute cependant que leurs emplois va s'intensifier dans le contexte des systèmes cyber-physiques à venir car les expérimentations virtuelles que constituent les simulations ne sauront pas répondre aux évaluations de risques sur ces systèmes. Dans ce cas, l'écriture proposée par la seconde géométrisation pourrait donner accès à des expressions théoriques de valeurs propres qui seront précieuses pour anticiper des interactions complexes.

VII. Conclusion

Dans cet article est proposé par les auteurs une extension originale du travail élaboré par Kron pour l'étude des machines électriques. Elle envisage l'utilisation des sous variétés et la seconde géométrisation. Cette méthode est plus souple que celle envisagée par Kron. Elle permet par exemple de s'affranchir des problèmes de tenseurs métriques pour lesquels la matrice est non symétrique, contrairement aux attentes de la théorie [1]. On peut rappeler à cet effet la remarque donnée dans [1] par les auteurs : "*Une théorie générale des réseaux linéaires symétriques ou non, doit s'appuyer sur la définition d'un espace métrique avec tenseur fondamental à symétrie non imposée : un tel espace peut être appelé non-Riemannien (non symétrique)*". Nous proposons ici une autre alternative permettant de conserver la propriété fondamentale de symétrie pour le tenseur métrique.

Sur la linéarité, le formalisme des domaines [7][8] permet d'étendre la propriété de symétrie à des impédances vues comme des opérateurs généralisés s'appliquant non seulement au domaine de l'électricité mais aussi à la mécanique, thermique, etc. La proposition intègre ainsi les éléments pour intégrer la méthode de Kron dans l'approche générale de la géométrie différentielle et de la topologie algébrique [9][10].

REFERENCES

- [1] DENIS-PAPIN, Maurice et KAUFMAN, A. N. Cours de calcul tensoriel appliqué. 1966.
- [2] MAURICE, Olivier, REINEIX, Alain, DURAND, Philippe, et al. Kron's method and cell complexes for magnetomotive and electromotive forces. arXiv preprint arXiv:1412.0187, 2014.
- [3] MAURICE, Olivier. La compatibilité électromagnétique des systèmes complexes. Hermes science publ., 2007.
- [4] TROYANOV, Marc. Cours de géométrie. PPUR presses polytechniques, 2002.
- [5] MAURICE, Olivier. Introduction d'une théorie des jeux dans des topologies dynamiques. 2013. Thèse de doctorat. Limoges.
- [6] PEIKARI, Behrouz. Fundamentals of network analysis and synthesis. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1974.
- [7] MAURICE, Olivier et PIGNERET, Jacques. Digital circuit susceptibility characterization to RF and microwave disturbances. In : Radiation and Its Effects on Components and Systems, 1997. RADECS 97. Fourth European Conference on. IEEE, 1997. p. 178-181.
- [8] MAURICE, Olivier. De l'expérimentation sur des systèmes complexes en compatibilité électromagnétique, à leurs représentations et leurs analyses dans un espace géométrique abstrait. 2016. Thèse de doctorat. école centrale de Lyon, ED Lyon1.
- [9] DURAND, Philippe, MAURICE, Olivier, et REINEIX, Alain. Generalized Interaction Principle Implemented in the Kron's Method. In : Proceedings of the World Congress on Engineering. 2013.
- [10] Olivier Maurice, Philippe Durand. Modélisation des systèmes complexes. : Présentation des grands principes de la méthode xTAN. Présentation effectuée lors de la réunion du groupe CESIR de l'AFSCET à l'ESIGELEC, le 19 décembre. 2015. <hal-01246740>

VIII. Annexe

Pour le second terme on a :

$$\frac{\partial}{\partial e_\beta} \left(-L_{\beta\alpha} \frac{dJ^\alpha}{dt} \right) = -L_{\beta\alpha} y^{\alpha x} \frac{d}{dt} \delta_x^\beta = 0 \quad (16)$$

car $J^\alpha = y^{\alpha x} e_x$ et

$$\frac{\partial}{\partial e_\beta} e_x = \delta_x^\beta$$